数理解析研究所講究録
309巻 1977年 80-85

CABLE KNOTS OF FIBRED KNOTS ARE FIBRED

東大理 大川哲介

§1. 定理の Statement.

$L = \cup K_i$ を μ-components link, L' を L の $(p_1, q_1; p_2, q_2; \cdots p_\mu, q_\mu)$ - 型 cable link とする. さらに, $p_1 = p_2 = \cdots = p_\mu = p$, $q_i \neq \sum_{j \neq i} lk(K_i, K_j)$ を仮定する. (lk は linking number を示す.) 以後この記号及び仮定を通して使う. 以上の仮定のもとに, 次の諸定理が成立する.

<u>定理 1.</u> L が fibred なら L' も fibred である.

<u>系</u> iterated torus knot は fibred である

<u>定理 2.</u> $lk(K_i, K_j) = 0$ $(i<j)$ なる仮定をさらに付け加える. L, L' の Seifert 行列を各々 $\Gamma(L)$, $\Gamma(L')$ とすると, $\Gamma(L')$ は次の様になる.

$$\Gamma(L') = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma(L), & \Gamma(L) & \cdots & \Gamma(L) \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma(L)^*, & \Gamma(L)^*, & \cdots & \Gamma(L) \end{pmatrix}}_{p}\right\} p$$

$$\oplus\,(B_{p,q_1}) \oplus (B_{p,q_2}) \oplus \cdots \oplus (B_{p,q_\mu})$$

ここで，$*$ は転置行列，$\oplus$ は対角和，B_{p,q_i} は (p,q_i) 型 torus link の Seifert 行列を表わす．

系　さらに L, L' を共に knot とする．L, L' の Alexander polynomial を各々 $\Delta_L, \Delta_{L'}$ とすると，次の式が成立する．$q = q_1$ とする．

$$\Delta_{L'}(t) = \Delta_L(t^p)\,\frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$$

§2. 記号及び規約

$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\partial D^2 = S^1$,

$\varphi_{p,q,i} : S^1 \to D^2 \times S^1$,

$\varphi_{p,q,i}(z) = \left(\frac{1}{2} z^{q/r} \zeta^i,\ \frac{1}{2} z^{p/r}\right)$, $(i = 0, 1, \cdots r-1)$

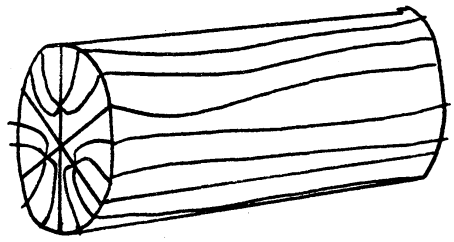
ここで $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $r = \text{G.C.D.}(p,q)$, $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/p}$

$\varphi_{p,q} = \cup_i \varphi_{p,q,i}$ を $D^2 \times S^1$ に於ける (p,q) 型

torus link と呼ぶ. $F_{p,q} : (D^2 \times S^1 - \mathrm{Im}\,\varphi_{p,q}) \to S^1$

$$F_{p,q}(z, t) = \mathrm{Arg}\,\frac{2^{p-q} z^p t^{-q} - 1}{2^{p-q} t^{-q} - 1} \quad (\mathrm{Arg}: 偏角)$$

すると, $F_{p,q}$ は fibration である. $p=3$ の場合を図示すると,
右図の如くとなる.



$: D^2 \times S^1$

$L = \cup_i K_i$, $K_i : S^1 \to S^3$, $(i = 1, 2, \cdots \mu)$:
μ-components link, $N = \cup N_i$,
$N_i : D^2 \times S^1 \to S^3$ を L の正則近傍で
$K_i(S^1) = N_i(0 \times S^1)$ なるものとする.

定義. $T = (p_1, q_1 ; p_2, q_2 ; \cdots ; p_\mu, q_\mu) \in \mathbb{Z}^{2\mu}$, $p_1, p_2, \cdots p_\mu > 0$, さらに $N_i(1 \times S^1)$ が K_i の longitudes であるとする. $(i = 1, 2, \cdots \mu)$ このとき, $L' = \cup N_i \circ \varphi_{p_i, q_i}$ を L の T-型の cable link と云う.

§3. 定理の証明

定理1の証. 仮定より,

$$k_i = q_i - \sum_{j \neq i} lk(K_i, K_j) \neq 0$$

$\pi : S^3 - \mathrm{Im}\, L \to S^1$ を 仮定により存在する fibration, とすると, L' は $lk(N_i(1 \times S^1), K_i)$ を適当に取ることにより, $L' = \cup N_i \circ \varphi_{p_i, k_i}$ の様にも表わすことが出来る. ここで 2つの fibration : $g_p \circ \pi \circ N_i |_{\partial D^2 \times S^1}$ と $F_{p_i, k_i} |_{\partial D^2 \times S^1}$ は ($g_p(z) = z^p$), compatible であるから 最初から一致していたものと考えて良い. これらを つなぎ合わせることによって L' の fibration を得る. **Q.E.D.**

定理2の証明 S を L の Seifert surface, $S_0 = Cl(S - \mathrm{Im}\, N)$, S_i $(i = 1, 2, \cdots p)$ を S_0 の small deformations とする. (一つの向きにより自然な順番にとる) これらは $Cl(S^3 - \mathrm{Im}\, N)$ の中にあり, かつ 互いに disjoint とする. さらに

$$\partial\left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i (F_{p, g_i}^{-1}(1)) \right) = \bigcup_{j=1}^{p} \partial S_j$$

と仮定して良い. すると

$$S' = \left(\bigcup_{i=1}^{\mu} N_i (F_{p, g_i}^{-1}(1)) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} S_j \right)$$

は L' の Seifert surface となる.

$M_{1i} = H_1(S_i)$, $(i = 1, 2, \cdots p)$

$M_{2i} = H_1(N_i(F_{p, g_i}^{-1}(1)))$, $(i = 1, 2, \cdots \mu)$ とする.

但しホモロジーは全て $\mathbb{Z}$ 係数とする. すると,

$H_1(S') = (\oplus_{i=1}^{p} M_{1i}) \oplus (\oplus_{i=1}^{\mu} M_{2i})$,

$\langle M_{1i}, M_{2j} \rangle = 0$ $(\forall i \forall j)$, $\langle M_{2i}, M_{2j} \rangle = 0$ $(i \neq j)$

となる. 但し, $\langle x, y \rangle = lk(x, i^{+}(y))$, i^{+} は $+$ 方向への押出しとする。さらに $\langle\ ,\ \rangle$ の意味を考えることにより, $\langle M_{1i}, M_{1j} \rangle$ に対する関係行列は, $i \leqslant j$ のとき $\Gamma(L)$, $i > j$ のとき $\Gamma(L)^{*}$ と同一視される. 但し $\Gamma(L)$ は L の Seifert 行列, $\Gamma(L)^{*}$ はその転置を表わす. 最後に $\langle M_{2i}, M_{2i} \rangle$ の部分であるが, これは knot K_i が trivial な位置にあるとしても, その incident 行列は不変であるから (p, q_i) 一型 tous link の Seifert 行列と一致する. **Q.E.D.**

系の証明は初等的な計算であるから省略する.

§4. 応用

$f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ を原点において既約な多項式, $S_{\varepsilon}^{2n-1} = \{ p \in \mathbb{C}^n \mid |p| = \varepsilon \}$ ($\varepsilon > 0$: 十分小), とする. すると knot $S^3_{\varepsilon} \cap \{ z \in \mathbb{C}^2 \mid f(z) = 0 \} \subset S^3$ は iterated tous knot となり, 一般には tous knot とならない. 定理1により, この knot K の Seifert 行列は reducible だから, $K' = \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid f(z_1, z_2) + z_3^2 + z_4^2 = 0 \} \cap S^7$ についてもそうで

ある. これは A'Campo の問題に対する否定的な例を与える.

References

1. N. A'Campo, Some Problems in Topology, Edited by M. Kato, Manifold Tokyo, 1973, p.421
2 Lê Dũng Tráng, Sur les noeds algebraiques, Compo. Math; 25(1972) pp. 283~321
3 J. Stallings. On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds, Prentis-Hall, (1962) pp. 95~100
4. M. Yamamoto, Regular projections, and Seifert matrices of iterated torus knots, to appere

Note. 定理1はSimonにより, 定理2はHaconにより(knotの場合)独立に得られていることが最近わかった.

5. J. Simon Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 140~142